INSTITUT de FINANCEMENT du DEVELOPPEMENT du MAGHREB ARABE

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVII^{ème} PROMOTION

Dimanche 8 juillet 2007

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h30

Nombre de pages :02

*************** ******************

Exercice 1 : (8 points :1+1+1+1+1+1+1+1)

On dispose d'un ensemble E constitué de deux sous ensembles A et B de n et m entreprises appartenant à deux secteurs d'activité distincts. Les observations relatives aux chiffres d'affaires de ces entreprises sont respectivement notées $X_1, X_2, .., X_n$ et $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$

1. a. Rappeler l'expression de M_A, la moyenne du chiffre d'affaire des entreprises de la sous population A, en fonction de $X_1, X_2, .., X_n$.

   b. Même question pour M_B la moyenne du chiffre d'affaire des entreprises de la sous population B en fonction de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$

   c. En déduire l'expression de la moyenne générale M de l'ensemble des entreprises en fonction des moyennes M_A et M_B. Interpréter ce résultat.

   d. Exprimer les différences $M - M_A$ et $M - M_B$ en fonction de l'expression $M_A - M_B$

   e. Comparer M à M_A et à M_B si l'on suppose que $M_A = M_B$

2. On admet dans cette question que $M_A = M_B$. Exprimer la variance V de la variable X sur toute la population en fonction des variances de la même variable sur les deux sous ensembles A et B, notées V_A et V_B.

3. Reprendre la question précédente si l'on abondonne l'hypothèse d'égalité entre M_A et M_B

4. Application numérique : Retrouver le résultat de la question 3 pour le cas où $n = m = 5$ avec les valeurs suivantes de la variable X :

Ensemble A	$X_1 = 2$	$X_2 = 6$	$X_3 = 4$	$X_4 = 5$	$X_5 = 3$
Ensemble B	$X_6 = 11$	$X_7 = 19$	$X_8 = 20$	$X_9 = 15$	$X_{10} = 25$

Exercice 2 : (7 points:1+1+1+1+1+1+1)

On considère la régression qui relie le rendement mensuel d'un titre donné (y) et le rendement mensuel de l'indice (x) de la bourse des valeurs mobilières d'un pays donné et ce pour la période couvrant janvier 2005 à mars 2007 (soit 27 mois):

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t,$$

où ϵ_t, sont des termes aléatoires identiquement et indépendemment distribués d'espérance mathématique zéro et de variance σ^2, α et β sont des paramètres à estimer. On dispose des statistiques suivantes: $\sum_{t=1}^{27} y_t = 5.3$; $\sum_{t=1}^{27} x_t = 22$; $\sum_{t=1}^{27} y_t^2 = 485$;

$\sum_{t=1}^{27} x_t^2 = 112$ et $\sum_{t=1}^{27} y_t x_t = 135$

1. Commenter brièvement cette relation.

2. Calculer la variance de y, la variance de x et la covariance entre y et x.

3. En déduire les valeurs numériques des estimateurs des paramétres α et β obtenus par les moindres carrés ordinaires

4. Donner la valeur numérique de l'estimateur sans biais de la variance des résidus, notée $\widehat{\sigma^2}$.

5. La valeur du rendement de l'indice du pays pour le mois d'avril 2007 est $x_{28} = 3$.

a. Calculer la valeur de la prévision du rendement de ce titre pour le mois d'avril 2007.

b. Calculer la variance estimée de cette prévision

c. Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, construire un intervalle de prévision au seuil de 95%. On rappelle que pour une loi de Student à 25 degrés de liberté, nous avons : $P(|S| < 2.06) = 0.95$

Exercice 3 : (5 points:1+1+1+1+1)

On considère une variable aléatoire X normale centrée réduite $X \rightsquigarrow N(0,1)$ On pose $Y = |X|$

1- Déterminer le domaine des valeurs possibles de Y.

2- Déterminer $G(y)$ la fonction de répartition de Y en fonction de F la fonction de répartition de X.

3- En déduire la densité de probabilité de la variable Y.

4- Prouver que $E(Y^2)$ est égale à l'unité.

5- Prouver que la médiane de Y est le troisième quartile de la variable X.