

Institut de Financement du Développement du Maghreb
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXIV^{ème} PROMOTION

Lundi 12 juillet 2004

Epreuve de Méthodes Quantitatives
Durée : 1h30
Nombre de pages : 4 (y compris page de garde et table de student)
Coefficient : 1

Exercice 1 : (10 points :1 point par question)

Considérons n variables aléatoires indépendantes y_1, \dots, y_n ayant pour espérance mathématique m et variance σ^2 :

$$E y_i = m \\ V y_i = \sigma^2 \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

$$\text{On note } \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \text{ et } S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2$$

1. Calculer $E\bar{y}_n$ et $V\bar{y}_n$
2. (a) Exprimer \bar{y}_n en fonction \bar{y}_{n-1} et de y_n
(b) Déterminer la covariance entre \bar{y}_n et \bar{y}_{n-1}
(c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre \bar{y}_{n-1} et \bar{y}_n
(d) Interpréter ce dernier résultat.
3. (a) Trouver un minorant pour $P[-\alpha \leq \bar{y}_n - m \leq \alpha]$, pour un scalaire positif α .
(b) En déduire la limite en probabilité de \bar{y}_n quand $n \rightarrow +\infty$.
4. (a) Prouver que l'on a :

$$nS^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - n(\bar{y}_n - m)^2$$

- (b) En admettant que y_i sont des lois normales, prouver que $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ est la différence de deux lois de Khi-Deux dont il faut préciser les degrés de liberté.
- (c) En admettant que \bar{y}_n et $\sum_{i=1}^n (y_i - m)^2$ sont indépendantes, en déduire la loi de $\frac{nS^2}{\sigma^2}$.

Exercice 2 : (10 points :1 point par question)

Sur une période de dix ans, on dispose des informations sur l'épargne (E_t), mesurée en millions de dinars et le taux d'intérêt (R_t) mesuré en pourcentage. Ces informations sont résumées comme suit :

$$\sum_{t=1}^{10} E_t = 435, \quad \sum_{t=1}^{10} R_t = 43.5, \quad \sum_{t=1}^{10} E_t^2 = 20775, \\ \sum_{t=1}^{10} R_t^2 = 215.25 \quad \text{et} \quad \sum_{t=1}^{10} E_t R_t = 2106.5$$

On se propose d'estimer une relation linéaire définie par :

$$E_t = \alpha + \beta R_t + \epsilon_t, t = 1, \dots, 10 \quad (1)$$

avec α et β des paramètres à estimer; $\epsilon_t, t = 1, \dots, 10$ sont des termes aléatoires identiquement et indépendamment distribués d'espérance mathématique zéro et de variance σ^2 . On suppose que ces termes suivent la loi normale.

1. (a) Interpréter les coefficients α et β . Quels sont les signes attendus de ces paramètres?
(b) Quelle interprétation économique peut-on donner au terme d'erreur ϵ_t ?
2. Estimer les paramètres α et β par la méthode des moindres carrés ordinaires.
3. Calculer la valeur numérique de l'estimateur sans biais de la variance des termes d'erreurs.
4. (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire simple entre les deux variables E et R .
(b) En déduire le coefficient de détermination.
5. Tester la significativité de l'effet de la variable R_t sur E_t , au seuil de 5%.
6. Pour l'année 11, le taux d'intérêt observé est de 4. Construire un intervalle de prévision pour l'épargne de l'année correspondante, au niveau de 95%.
7. (a) En admettant que le vrai modèle est celui défini par l'équation (1), montrer que l'estimation du modèle sans le terme constant (α) conduit à un estimateur biaisé de β .
(b) En déduire la variance de ce dernier estimateur.