Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVI$^{\text{ème}}$ PROMOTION

*****

Dimanche 09 juillet 2006

*****

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h30

Nombre de pages 3 (y compris la table de la loi de Gauss (loi normale centrée-réduite))

Exercice 1 (8 points: 1+1,5+1+1,5+1,5+1,5)

Le rendement X d'une action à la bourse des valeurs suit une loi normale d'espérance mathématique m et de variance σ^2 : $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$. On note $F(x)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite.

1. Déterminer la valeur numérique de la probabilité pour que X soit comprise entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$ $(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$

2. Ayant n observations indépendantes de la variable X notées $X_1, X_2, \cdots, X_n$. On pose :
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

   (a) Quelles sont les interprétations économiques des variables $\overline{X}$ et S^2 ?

   (b) Prouver que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de m

   (c) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

      i. Prouver que S^2 s'écrit en fonction de $(X_1 - X_2)$

      ii. Vérifier que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes

      iii. Interpréter ce dernier résultat en terme de relation entre la rentabilité et le risque.

Exercice 2 (12 points: 1,5+1.5+1.5+1.5+1+2+1.5+1.5)

On considère 20 observations individuelles pour le logarithme népérien de consommation de tabac (Y), le logarithme népérien du prix du tabac (X) et le logarithme népérien du revenu disponible (Z). On considère l'estimation de la relation suivante:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \text{ pour } i = 1, \cdots, 20 \tag{1}$$

où $\epsilon_i, i = 1, \cdots, 20$ sont des termes aléatoires identiquement et indépendemment distribués d'espérance mathématique zéro et de variance σ^2, α et β sont des paramètres à estimer.

1. Donner l'interprétation économique des deux paramètres α et β.
2. Donner l'expression des estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaire de α et β, notés respectivement $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$
3. Sachant que $V(X) = 0,74$, $Cov(X,Y) = -0,925$, $\overline{X} = 0,2$ et $\overline{Y} = 4,85$, calculer les valeurs numériques de $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Commenter les résultats obtenus.
4. En déduire la valeur du coefficient de détermination (R^2), pour $V(Y) = 1,6$. Commenter cette valeur.
5. L'ajout de la variable Z comme variable explicative de Y permet d'écrire la modèle (1) comme suit:

   $$Y_i = a + bX_i + cZ_i + \epsilon_i \text{ pour } i = 1, \cdots, 20 \tag{2}$$

   où ϵ_i garde les mêmes hypothèses que précédemment.

   (a) Quelle est la signification économique de c.

   (b) Donner l'expression des estimateurs de b et de c, par la méthode des moindres carrés ordinaires.

   (c) Sachant que $Cov(X,Z) = 0,6$ $V(Z) = 2,02$ et $Cov(Y,Z) = -0,45$; calculer les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires de b et c. Interprêter le résultat obtenu.

   (d) Calculer la nouvelle valeur du coefficient de détermination. Commenter

****