# Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXV$^{\text{ème}}$ PROMOTION

*****

Dimanche 10 juillet 2005

*****

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h30

Nombre de pages : 3 (y compris la table de Student)

**Exercice 1** :(6 points:1,5 point par question)

Considérons une fonction $y = f(x)$ où $x$ est une variable réelle. On définit $e$ l'élasticité de $y$ par rapport à la variable $x$ par $e = \frac{x}{y}f'(x)$ ($f'(x)$ désigne la dérivée par rapport à $x$)

1. Vérifier que $e$ peut s'écrire sous la forme

$$e = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

2. En approximant $dy$ et $dx$, respectivement, par $\Delta y$ et $\Delta x$, donner l'interprétation de $e$. Quel intérêt représente-t-elle pour l'analyse économique?
3. Calculer $e$ pour la fonction $y = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.
4. Interpréter le résultat précédent en admettant que $y$ est la quantité de production d'un bien et $x$ est sont prix unitaire.

**Exercice 2** :(14 points: 1+1+1,5+1,5+1,5+1,5+1,5+1,5+1,5+1,5)

Les observations concernant la quantité échangée d'un bien ($Q$) et son prix ($P$) sont résumées dans le tableau ci-dessous:

| Q | 101 | 93 | 72 | 81 | 62 | 57 | 74 | 103 | 81 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 22 | 24 | 23 | 26 | 27 | 28 | 25 | 20 | 25 | 27 |

1. Calculer les moyennes et les variances empiriques des deux variables $Q$ et $P$ sachant que $\sum_{i=1}^{10} Q_i^2 = 65095$, $\sum_{i=1}^{10} P_i^2 = 6157$ et $\sum_{i=1}^{10} Q_i P_i = 19284$.

2. Calculer la covariance entre $Q$ et $P$. En déduire le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables.

3. Selon le résultat de la question 2, préciser la nature de la relation entre $Q$ et $P$ (s'agit-il d'une fonction d'offre ou d'une fonction de demande?)

4. On considère à présent le modèle linéaire suivant :

$$Q_i = \alpha + \beta P_i + \epsilon_i \; i = 1, \cdots, 10$$

où $\epsilon_i, i = 1, \cdots, 10$ sont des termes aléatoires identiquement et indépendemment distribués d'espérance mathématique zéro et de variance $\sigma^2$. , $\alpha$ et $\beta$ sont des paramètres à estimer.

   (a) Donner les expressions des estimateurs de $\alpha$ et $\beta$ obtenus par la méthodes des moindres carrés ordinaires, notés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.

   (b) Calculer les valeurs numériques des estimateurs $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.

   (c) Décomposer la variance de $Q$ en variance expliquée et variance résiduelle.

   (d) Déterminer la valeur numérique de l'estimation sans biais de la variance des erreurs, notée $\widehat{\sigma^2}$.

   (e) Calculer la valeur de l'estimation de la variance de $\widehat{\beta}$.

   (f) En admettant la normalité de $\epsilon_i$:

      i. Construire un intervalle de confiance au niveau 95% pour le paramètre $\beta$.

      ii. Tester l'hypothèse $H_0 : \beta = -5$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \beta \neq -5$ pour un niveau de confiance de 95%.