Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA $27^{\text{ème}}$ PROMOTION

*****

Corrigé

Exercice 1

1 a. - $M_A = \frac{X_1+,X_2+,..+,X_n}{n}$

b. $M_B = \frac{X_{n+1}+X_{n+2}+...,+X_{n+m}}{m}$

c. $M = \frac{(X_1+,X_2+,..+,X_n)+(X_{n+1}+X_{n+2}+...,+X_{n+m})}{n+m} = \frac{nM_A+mM_B}{n+m} = \frac{n}{n+m}M_A + \frac{m}{n+m}M_B$

M est une moyenne pondérée des deux moyennes M_A et M_B

d. - $M - M_A = \frac{n}{n+m}M_A + \frac{m}{n+m}M_B - M_A = \frac{m}{n+m}(M_B - M_A)$

$M - M_B = \frac{n}{n+m}M_A + \frac{m}{n+m}M_B - M_B = \frac{n}{n+m}(M_A - M_B)$

e. si $M_A = M_B$,on en déduit que $M - M_A = 0$ et $M - M_B = 0$

2. Nous avons par hypothèse $M_A = M_B = M$

$$V = \frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m}(X_i - M)^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m}(X_i - M)^2\right]$$

comme $M = M_A = M_B$

$$V = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_A)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m}(X_i - M_B)^2\right] = \frac{1}{n+m}\left[nV_A + mV_B\right]$$

3. $V = \frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m}(X_i - M)^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m}(X_i - M)^2\right]$

$$= \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}((X_i - M_A) + (M_A - M))^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m}((X_i - M_B) + (M_A - M))^2\right]$$

$$= \frac{1}{n+m}\left[nV_A + n(M_A - M)^2 + mV_B + m(M_A - M)^2\right]$$

les doubles produits $\sum_{i=1}^{n}((X_i - M_A)(M_A - M))$ et $\sum_{i=n+1}^{n+m}((X_i - M_B)(M_A - M))$ sont nuls. On obtient :

$$V = \frac{1}{n+m}\left[nV_A + mV_B\right] + \left[n\frac{m^2}{(n+m)^3} + m\frac{n^2}{(n+m)^3}\right](M_A - M_B)^2 =$$

$$= \frac{1}{n+m}\left[nV_A + mV_B\right] + \frac{nm}{(n+m)^2}(M_A - M_B)^2.$$

4- $M_A = 4$

$M_B = 18$

$V_A = \frac{1}{5}[4+4+0+1+1] = 2$
$V_B = \frac{1}{5}[49+1+4+9+49] = \frac{112}{5} = 22.4$
$M = 10.5 = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(18) = 11$
$V = \frac{1}{10}\left[9^2+5^2+7^2+6^2+0+8^2+9^2+4^2+14^2\right]$
$= 61.2$
On vérifie que $V = 61.2 = \frac{1}{10}[5(2)+5(22.4)] + 0.25(14)^2$

Exercice 2 : (7points:)

$$y_t = \alpha + \beta\ x_t + \epsilon_t,$$

$$\sum_{t=1}^{27} y_t = 5.3;\ \sum_{t=1}^{27} x_t = 22;\ \sum_{t=1}^{27} y_t^2 = 485;\ \sum_{t=1}^{27} x_t^2 = 112 \text{ et } \sum_{t=1}^{27} y_t x_t = 135$$

1. Il s'agit d'une relation linéaire entre le rendement du titre et le rendement global du marché. Cette relation est dérivée du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

2. $V(y) = 17,92, \quad V(x) = 3,48 \quad \text{et} \quad Cov(y,x) = 4,84.$

3.
$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = 1.39 \\ \widehat{\alpha} &= \overline{y} - \widehat{\beta}\ \overline{x} = -0.94 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} SCE &= \widehat{\beta}\sum(x_t-\overline{x})(y_t-\overline{y}) = \widehat{\beta}\ 27\ Cov(x,y) = 1,39*27*4,84 = 181,64 \\ SCT &= \sum(y_t-\overline{y})^2 = 27*V(y) = 27*17,92 = 483,84 \\ \widehat{\sigma^2} &= \frac{SCT-SCE}{27-2} = \frac{483,84-181,64}{27-2} = 12,09 \end{aligned}$$

5. $x_{28} = 3.$

   (a) $\widehat{y}_{28} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x_{28}$=-0,94+1,39*3 $= 3,23$
   (b)
$$\begin{aligned} Var(\widehat{y}_{28}) &= \left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{28}-\overline{x})^2}{\sum(x_t-\overline{x})^2}\right\} \\ &= \left\{1 + \frac{1}{27} + \frac{(3-0,81)^2}{93,94}\right\} \\ &= 1,09 \end{aligned}$$

(c)

$$IC_{y28}^{0,95} = 3,23 \pm 2,06 * \sqrt{1,09} = 3,23 \pm 2,15 = [1,08\ ;5,38]$$

Exercice 3 : (5 points)

1- $Y \geqslant 0$ le domaine de Y est l'ensemble des réels positifs

2- Pour $y \geqslant 0$ $G(y) = P[Y \leq y] = P[|X| \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = 2F(y) - 1$

3- La densité de probabilité de y est $g(y) = 2f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp -\frac{1}{2}y^2$

4- $E(Y^2) = E(X^2) = Var\ X = 1$

5- M médiane de Y est telle que

$G(M) = \frac{1}{2} = 2F(M) - 1$

$F(M) = \frac{3}{4}$

M est le troisième quartile de X.