Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

Concours de recrutement de la 24ème promotion

Méthodes Quantitatives - Corrigé

Exercice 1

1- $E\overline{y}_n = E(\frac{1}{n}\sum y_i) = \frac{1}{n}\sum Ey_i = \frac{nm}{n} = m$

$V(\overline{y}_n) = \frac{1}{n^2}v(\sum y_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

2- a $n\overline{y}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i + y_n = (n-1)\,\overline{y}_{n-1} + y_n$

d'où $\overline{y}_n = \frac{n-1}{n}\overline{y}_{n-1} + \frac{1}{n}y_n$

b- $cov(\overline{y}_n, \overline{y}_{n-1}) = cov\left(\frac{n-1}{n}\overline{y}_{n-1} + \frac{1}{n}y_n, \overline{y}_{n-1}\right)$

$= \frac{n-1}{n}v\overline{y}_{n-1} + \frac{1}{n}cov(y_n, \overline{y}_{n-1})$

$cov(y_n, \overline{y}_{n-1}) = 0$ du fait que y_n est indépendante de toutes les variables $y_1....y_{n-1}$ figurant dans $\overline{y}_{n-1}$

d'où $cov\left(\overline{y}_n, \overline{y}_{n-1}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

$P_{\overline{y}_{n-1}\overline{y}_n} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$

-Le cefficient de corrélation est proche de l'unité. Cela signifi que y_{n-1} et y_n vont avoir des valeurs trés voisines pour n assez grand. Les signes et les ordres de grandeur des deux grandeurs sont trés similaires.

3- Nous avons P$[-\alpha \leqslant (\overline{y}_n - m) \leqslant \alpha] = P\left[|\overline{y}_n - m| \leqslant \alpha\right] \geqslant 1 - \frac{V(\overline{Y})}{\alpha^2}$

Le majorant est alors : 1 - $\frac{var\overline{y}}{\alpha^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\alpha^2}$

b- En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, nous remarquons que:

$\underrightarrow{\lim}$P$[|\overline{y}_n - m| \leqslant \alpha] \geqslant 1$ ce qui prouve que $\underrightarrow{\lim}P\left[|\overline{y}_n - m| \leqslant \alpha\right] = 1$ est donc $\overline{y}_n \xrightarrow{p} m$

4-a- $nS^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum\limits_{i-1}^{n}((y_i - m) + (m - \overline{y}))^2$

$= \sum\left(y_i - m\right)^2 + 2\left(m - \overline{y}\right)\sum\left(y_i - m\right) + n(m - \overline{y})^2$

$= \sum\left(y_i - m\right)^2 - 2n\left(y - m\right)^2 + n\left(y - m\right)^2 = \sum\left(y_i - m\right)^2 - n(y - m)^2$

b- Si les y_i sont des lois normales, nous aurons

$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \sum\left(\frac{y_i - m}{\sigma}\right)^2 - n\left(\frac{\overline{y} - m}{\sigma}\right)^2$

$\sum\left(\frac{y_i - m}{\sigma}\right)^2 \sim X^2(n)$

$y \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n}) \Longrightarrow \sqrt{n}(\overline{y} - m) \sim N(0, \sigma^2)$

$\Longrightarrow \frac{n(y-m)^2}{\sigma^2} \sim X^2(1)$

c- Partant de $\frac{ns^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{y}-m)^2}{\sigma^2} = \sum\frac{(y_i - m)^2}{\sigma}$

et en utilisant les fonctions génératrices de $\frac{n(\overline{y}-m)^2}{\sigma^2}$ et de $\sum\frac{(y_i-m)^2}{\sigma}$ qui sont $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$ et $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$, ou en déduit que $\frac{Mns^2}{\sigma^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ et donc $\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim X^2\left(n-1\right)$

Exercice 2

1/ a i) $\beta = \frac{DE}{DR}$: La variation de l'épargne suite à un accroissement d'une unité du taux d'intérêt $\beta \rangle 0$

ii) α : le montant d'épargne pour un taux d'intérêt nul $\longrightarrow$ l'épargne minimum

b/ ξ : résume les autres variables économiques qui ont une influence sur l'épargne telles que la consommation, le niveau des prix,.....

2/ $\widehat{\beta} = \frac{\sum\left(E_t-\overline{E}\right)\left(R_t-\overline{R}\right)}{\sum(R_T-R)^2} = \frac{\sum R_tE_t-T\overline{RE}}{\sum R_t^2-TR^2}$

$\widehat{\alpha} = \widehat{E} - \widehat{\beta R}$

$AN.$ $\sum R_tE_t - T\overline{RE} = 2106,5 - 10*435*4,35 = 214,25$

$\sum\left(R_t - \overline{R}\right)^2 = 215,25 - 10*4,35^2$
$= 26,025$

$\widehat{\beta} = \frac{214,25}{26,025} = 8,232$

3/ $\sigma^2\frac{SCR}{T-2}$

avec $SCR = SCT - SCE$

$SCT = \sum(E_t - \overline{E})^2 = \sum E_t^2 - T.\overline{E}^2$
$= 20775 - 10.43,5^2 = 1852.5$

$SCE = \widehat{\beta}\sum\left(E_t - \overline{E}\right)\left(R_t - \overline{R}\right)$

$=\widehat{\beta}^2 - \sum\left(R_t - \overline{R}\right)^2 = 1763,706$

$SCR = 1852,5 - 1763,706 = 88,794$

$\Longrightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{88,704}{10-2} = \frac{88,794}{8} = 11,100$

4/ a) $Cov(E,R) = P(E,R) = \frac{Cov(E,R)}{\sqrt{V(E)V(R)}}$

$Cov(E,R) = \frac{1}{T}(\sum E_tR_t - T\overline{ER})$

$V(E) = \frac{1}{T}\sum(E_t - \overline{E})^2$

$V(R) = \frac{1}{T}\sum(R_t - \overline{R})^2$

$\Longrightarrow P\left(R,E\right) = \frac{\sum(E_t-\overline{E})(R_t-\overline{R})}{\sqrt{\sum(E_t-\overline{E})^2\sum(R_t-\overline{R})^2}}$

$= \frac{214.25}{\sqrt{26.025*1852.15}} = 0.976$

b) $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\widehat{\beta}\sum\left(E_t-\overline{E}\right)(R_t-\overline{R})}{\sum(R_t-\overline{R}^2)}$

$= \frac{\left(\sum\left(E_t-\overline{E}\right)(R_t-\overline{R})^2\right)}{\sum\left(E_t-\overline{E}\right)^2\sum(R_t-\overline{R})^2}$

$= P^2\left(E,R\right) = 0,976^2 = 0,952$

5/ **Test :**

$H_0 : \beta = 0$ contre $H_1 = \beta \neq 0$ $\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\sigma}\widehat{\beta}} = \frac{\beta}{\sqrt{\widehat{v}(\widehat{\beta})}} \sim St(8)$

$\widehat{v}(\widehat{\beta}) = \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sum(R_t-\overline{R})^2} = \frac{11.1}{26.025} \simeq 0.426$

$\widehat{t} = \frac{8.232}{\sqrt{0.426}} = 12.612$

$\left|\widehat{t}\right| \rangle t^{5\%}(8) = 2,306$

$\Longrightarrow \widehat{\beta}$ est significativement différent de zéro au seuil de 5%

6/ i- $t\widehat{E}_{11} = 7.691 + 8.232*4$
$= 40.619$

$$= e_{11} = E_{11} - \widehat{E}_{11}$$

$$\widehat{V}(e_{11}) = \left\{1 + \frac{1}{T} + \frac{\left(R_{11} - \overline{R}\right)^2}{\sum (R_t - \overline{R})^2}\right\}\sigma^2$$

$$\widehat{V}(e_{11}) = 11,262$$

ii) $C_{E_{11}}^{95\%} = \widehat{E}_{11} \pm t^{5\%}(8)\sqrt{\widehat{v}(e_{11})}$

$= 40.619 \pm 2.306.\sqrt{11.262}$

$= 40.619 \pm 2.306\ .\ 3.356$

$= [32.88\ ;\ 48.358]$

7/ a) $\widehat{\widehat{\beta}} = \frac{\sum E_t R_t}{\sum R_{t^2}}$

$= \frac{\sum R_t(\alpha + \beta R_t + \xi_t)}{\sum R_{t^2}}$

$= \frac{\alpha \sum R_t + \beta \sum R_{t^2} + \sum R_t \xi_t}{\sum R_{t^2}}$

$E\left(\widehat{\widehat{\beta}}\right) = \beta + \alpha \frac{\sum R_t}{\sum R_{t^2}} \neq \beta$

b) $V\left(\widehat{\widehat{\beta}}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum R_t^2}$