

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVI^{ème} PROMOTION

Dimanche 9 juillet 2006

Corrigé de l'Epreuve de Méthodes Quantitatives

Exercice 1 :

1. $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq 2) = P(|N(0, 1)| \leq 2) = 2 * F(2) - 1 = 0,954$

2. (a) \bar{X} : le rendement moyen, S^2 : risque

(b) $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m = \frac{n*m}{n} = m \implies \bar{X}$ estimateur sans biais de m

(c) $n = 2$

i.

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(X_1 - \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) \right)^2 + \left(X_2 - \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X_1 - X_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - X_1}{2} \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{X_1 - X_2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

ii. Il suffit de montrer que $cov(\bar{X}, X_1 - X_2) = 0$ (lois normales)

$$\begin{aligned} cov(\bar{X}, X_1 - X_2) &= \frac{1}{2} cov(X_1 + X_2, X_1 - X_2) \\ &= \frac{1}{2} [cov(X_1, X_1) - cov(X_2, X_2)] \\ &= \frac{1}{2} [\sigma^2 - \sigma^2] = 0 \end{aligned}$$

iii. Ce résultat indique que le rendement d'un portefeuille (équ pondéré) est indépendant du risque.

Exercice 2 :

1. β : représente l'élasticité prix de la demande de Tabac α représente le logarithme de la consommation correspondant à un prix unitaire du Tabac.

2.

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \frac{Cov(X, Y)}{V(X)} \\ \widehat{\alpha} &= \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{X}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= -\frac{0,925}{0,74} = -1,25 \\ \widehat{\alpha} &= 4,85 + 1,25 * 0,2 = 5,1\end{aligned}$$

4.

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\widehat{\beta} * Cov(X, Y)}{V(Y)} = \frac{1,25 * 0,925}{1,6} = 0,723$$

5. (a) c : représente l'élasticité revenu de la demande de Tabac
(b)

$$\begin{pmatrix} \widehat{b} \\ \widehat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, Z) \\ Cov(X, Z) & V(Z) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Cov(X, Y) \\ Cov(Z, Y) \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \widehat{b} \\ \widehat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,74 & 0,6 \\ 0,6 & 2,02 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0,925 \\ -0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,409 \\ 0,196 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{SCE}{SCT} = \frac{\widehat{b} * Cov(X, Y) + \widehat{c} * Cov(Z, Y)}{V(Y)} \\ &= \frac{\widehat{b} * Cov(X, Y) + \widehat{c} * Cov(Z, Y)}{V(Y)} = 0,759\end{aligned}$$