Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXV$^{\text{ème}}$ PROMOTION

*****

Dimanche 10 juillet 2005

*****

Corrigé de l'Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h30

Nombre de pages :03

Exercice 1 :

1. En écrivant que $f\prime(x) = \frac{dy}{dx}$, on obtient

$$e = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

2. $e = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$ sous cette foreme e apparaît comme le rapport dy taux de croissance de y sur le taux de croissance de x. A titre d'exemple, $e = 2$ signifie que si x augmente de 1% alors y augmente de 2%. L'intérêt de e réside dans le fait qu'elle soit sans unité.

3. $y = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ce qui entraine $e = \frac{1}{2}$

4. Le signe positif de e prouve qu'il s'agit d'une équation d'offre puisque la quantité augmente de 0,5% quand le prix augmente de 1% (fonction d'offre inélastique)

Exercice 2 :

1. Les calculs donnent :

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &= 79,4 \ \overline{P} = 24,7 \\
V(Q) &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Q_i^2 - \overline{Q}^2 = 6509,5 - 79,3^2 = 221,01 \\
V(P) &= 5,61 \text{ (même détail de calcul)}
\end{aligned}$$

(a) La covariance entre P et Q est :

$$Cov(P,Q) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Q_iP_i - \overline{QP} = 1928,4-(70,3)*(24,7) = -30,31$$

(b) Le coefficient de corrélation linéaire est :

$$\rho(P,Q) = \frac{Cov(P,Q)}{\sqrt{V(Q)}\sqrt{V(P)}} = -\frac{30,31}{\sqrt{221,01}\sqrt{5,61}} = -0,86$$

2. Il s'agit d'une équation de demande en raison du signe négatif du coefficient de corrélation (la loi de la demande est vérifiée)

(a)

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \frac{Cov(P,Q)}{V(P)} = -\frac{30,31}{5,6} = -5,40 \\ \widehat{\alpha} &= \overline{Q} - \widehat{\beta P}\end{aligned}$$

(b) Les calculs numériques fournissent les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \frac{Cov(P,Q)}{V(P)} = -\frac{30,31}{5,6} = -5,40 \\ \widehat{\alpha} &= \overline{Q} - \widehat{\beta P} = 79,3 + 5,4 * 24,7 = 212,75\end{aligned}$$

i. La variance expliquée par la régression est donnée par :

$$\begin{aligned}\text{Variance expliquée} &= \frac{1}{10}\widehat{\beta} * \left[\sum_{i=1}^{10} Q_iP_i - 10 * \overline{Q} * \overline{P}\right] = \frac{1}{10}\widehat{\beta}^2 \left[\sum_{i=1}^{10} P_i^2 - \overline{P}^2\right] \\ &= \frac{1}{10}(-5,4) * (-330,10) = 163,6\end{aligned}$$

ii. La variance résiduelle est égale à :

$$\begin{aligned}\text{Variance résiduelle} &= \text{Variance totale-Variance expliquée} \\ &= 221,0 - 163,7 = 57,3\end{aligned}$$

(c)

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{n}{n-2} * \text{variance résiduelle} = \frac{10}{8} * 57,3 = 71,6$$

(d)

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\widehat{\sigma^2}}{\left[\sum_{i=1}^{10} P_i^2 - \overline{P}^2\right]} = \frac{71,6}{56,1} = 1,28$$

(e) L'intervalle de confiance de β au niveau 95% est défini par:

$$\begin{aligned} IC_{\beta}^{0,95} \quad &: \quad \widehat{\beta} \pm \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta})} * t^{0,95}(8) = (-5,4) \pm \sqrt{1,28} * 2,3 \\ &= \quad [-8 \quad ; \quad -2,8] \end{aligned}$$

(f) La valeur (-5) appartient à l'intervalle de confiance de β au niveau 95%. Ce qui permet d'accepter l'hypothèse H_0